МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 519.71, 681.5, 303.732.4, 62.752; 621.534; 629.4.015 https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-360-369

Частотная функция и функция демпфирования в оценке динамических процессов в механических колебательных системах с симметрией



А. В. Елисеев
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения» (г. Иркутск, Российская Федерация)

Введение. Рассматривается новый подход в формировании методологического базиса системного анализа в приложении к задачам динамики механических колебательных структур. Целью исследования является разработка метода оценки свойств механических колебательных систем с учетом сил вязкого трения на основе частотных функций и функции демпфирования, зависящих от так называемого коэффициента форм связности, представляющего собой отношение характеристик обобщенных координат.
Материалы и методы. Используемые графоаналитические методы оценки динамических свойств механических колебательных систем с двумя степенями свободы основаны на определении экстремальных значений частотных функций и функции демпфирования, определяемых из соотношений, связывающих кинетическую, потенциальную энергию и значения функции рассеяния энергии. Математические модели строятся на основе формализма Лагранжа, матричных методов, элементов теории функций комплексной переменной.
Результаты исследования. Предложен метод построения частотных функций и функций демпфирования для класса механических колебательных систем с двумя степенями свободы на основе аналитических выражений, отражающих особенности соотношения потенциальной и кинетической энергии системы с учетом сил вязкого трения, представленных диссипативной функцией. Выведены общие аналитические выражения для частотной функции и функции демпфирования. Для механических колебательных систем с упруго-демпфирующими элементами, обладающими свойствами симметрии, проведен графоаналитический анализ экстремальных свойств соответствующих частотных функций и функций демпфирования. Представлены результаты численных экспериментов. Предложен критерий классификации частотных функций и функций демпфирования на основе топологических особенностей графиков соответствующих функций.
Обсуждение и заключения. Разработанный метод построения частотных функций и функций демпфирования может быть использован для отображения динамических особенностей механических колебательных систем. Предложенный матричный метод построения частотно-демпирующей функции для системы двумя степенями свободы может быть распространен на механические колебательные системы, рассматриваемые в различных системах координат.

Ключевые слова: механическая система, динамические связи, частотная функция, функция демпфирования, связность движений, экстремальные свойства, колебание, вязкое трение.

Для цитирования: Елисеев, А. В. Частотная функция и функция демпфирования в оценке динамических процессов в механических колебательных системах с симметрией / А. В. Елисеев // Advanced Engineering Research. — 2020. — Т. 20, № 4. — С. 360–369. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-360-369



Frequency function and damping function in assessment of dynamic processes in mechanical oscillatory systems with symmetry

A. V. Eliseev
Irkutsk State Railway Transport University (Irkutsk, Russian Federation)

Introduction. A new approach to the formation of the methodological basis of system analysis in the application to the problems on mechanical oscillatory structure dynamics is considered. The study objective is to develop a method for

evaluating properties of the mechanical oscillatory systems with account for viscous friction forces based on frequency functions and damping functions that depend on the so-called coefficient of connection forms, which is the ratio of characteristics of generalized coordinates.
Materials and Methods. The graphoanalytical methods used for evaluating the dynamic properties of mechanical oscillatory two-degree-of-freedom systems are based on determining the extreme values of the frequency functions and the damping function, which are determined from the relations between the kinetic, potential energy and the values of the energy dissipation function. Mathematical models are based on Lagrange formalism, matrix methods, and elements of the theory of functions of a complex variable.
Results. A method is proposed for constructing frequency functions and damping functions for a class of mechanical oscillatory two-degree-of-freedom systems based on the analytical expressions that reflect features of the ratio of the potential and kinetic energy of the system considering viscous friction forces represented by the dissipative function. General analytical expressions for the frequency function and the damping function are derived. Graphoanalytical analysis of extreme properties of the corresponding frequency functions and damping functions is performed for mechanical vibrational systems with elastic-damping elements with symmetry properties. The results of numerical experiments are presented. A criterion for classifying frequency functions and damping functions based on the topological features of the graphs of the corresponding functions is proposed.
Discussion and Conclusions. The developed method for constructing frequency functions and damping functions can be used to display the dynamic features of mechanical oscillatory systems. The proposed matrix method for constructing a frequency-damping function for a two-degree-of-freedom system can be extended to the mechanical vibrational systems considered in different coordinate systems.

Keywords: mechanical system, dynamic connections, frequency function, damping function, connectivity of movement, extreme properties, oscillation, viscous friction.

For citation: A. V. Eliseev. Frequency function and damping function in assessment of dynamic processes in mechanical oscillatory systems with symmetry. Advanced Engineering Research, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 360–369. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-360-369

Введение. Методам использования механических колебательных систем в качестве расчетных схем в задачах оценки динамических свойств технических объектов, работающих в условиях интенсивных вибрационных нагрузок, уделяется существенное внимание [1–9]. К числу распространенных подходов к оценке динамических свойств механических колебательных систем можно отнести методы, основанные на экстремальных свойствах отношения потенциальной и кинетической энергии [10, 11]. Методы, построенные на основе энергетических отношений, получили развитие в использовании частотной функции, как функции коэффициента форм связности координат механической системы, для оценки особенностей динамики механических колебательных систем без учета сил трения [12–15].

Вместе с тем, методы оценки динамических свойств механических колебательных систем, с учетом сил вязкого трения на основе частотной функции, требуют детализации представлений в зависимости от величины вязкого трения. Это связано, в частности, с тем, что для систем с апериодическим движением понятие частоты колебания может терять смысл.

Предлагаемая работа посвящена развитию метода оценки свойств механических движений на основе развития понятия частотной функции, когда вводится дополнительная функция демпфирования, отражающая особенности учета сил вязкого трения в зависимости от коэффициентов форм связности.

Материалы и методы. Рассматриваются свободные движения механической упруго-диссипативной системы с сосредоточенными параметрами с двумя степенями свободы. Принципиальная схема системы представлена на рис. 1.

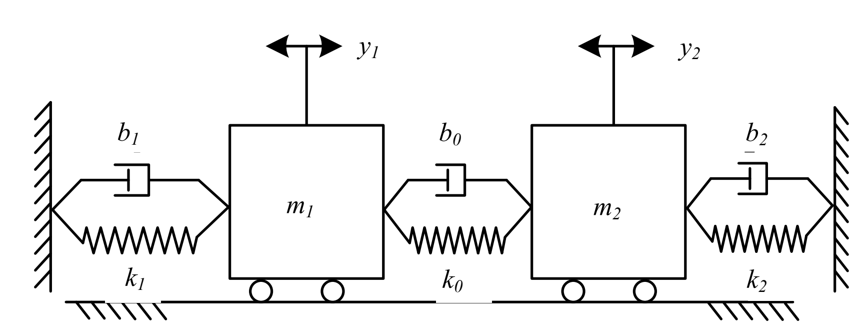


Рис. 1. Механическая колебательная система с учетом вязкого трения

Обобщенные координаты y_1, y_2, обозначают смещение массо-инерционных элементов m_1, m_2 относительно положения статического равновесия. Кинетическая энергия T, потенциальная энергия Π и функция рассеяния F имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 , \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (y_2 - y_1)^2 , \tag{2}$$

$$F = \frac{1}{2} b_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} b_0 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{y}_2^2 . \tag{3}$$

Система уравнений Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}_1} = 0; \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial y_2} + \dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}_2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

После подстановки выражений T, Π, F система дифференциальных уравнений (4) принимает вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (b_0 + b_1)\dot{y}_1 - b_0 \dot{y}_2 + (k_0 + k_1) y_1 - k_0 y_2 = 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 + (b_0 + b_2)\dot{y}_2 - b_0 \dot{y}_1 + (k_0 + k_2) y_2 - k_0 y_1 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Формы свободных движений представленной системы (5) в общем случае определяются собственными числами характеристического уравнения с учетом их кратности. Рассматривается случай простых корней. Таким образом, пусть решение $y_1 = y_1(t)$, $y_1 = y_2(t)$ системы (5) представимо в виде:

$$\vec{y} = \vec{Y} e^{pt} , \tag{6}$$

где $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ — вектор-решение, $\vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ — числовой вектор, $p = \sigma + j\omega$ — комплексный параметр, t — переменная времени. Полагается, что начальные условия согласованы с видом искомого решения (6).

Задача заключается в построении и оценке экстремальных свойств функций, отображающих характеристики собственных движений системы с учетом сил вязкого трения.

Результаты исследований

1. Построение частотной функции и функции диссипации на основе энергетического соотношения. Система (5) в обозначениях (6) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} m_1 p^2 + (b_0 + b_1) p + k_0 + k_1 & -b_0 p - k_0 \\ -b_0 p - k_0 & m_2 p^2 + (b_0 + b_2) p + k_0 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0 . \tag{7}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 & -b_0 \\ -b_0 & b_0 + b_2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 + k_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

С учетом (8) матричное соотношение (5) принимает вид:

$$(p^2 A + pB + C)\vec{Y} = 0 . \tag{9}$$

На основе матричного соотношения (9) могут быть получены различные скалярные уравнения, с учетом экстремальных свойств которых, в свою очередь, могут быть определены свойства решения p уравнения (9). В частности, скалярное умножение левой и правой части равенства (9) на вектор $\vec{Y}$ приводит к скалярному выражению:

$$p^2 \left\langle A\vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle + p \left\langle B\vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle + \left\langle C\vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle = 0 . \tag{10}$$

С помощью подстановки $p = \sigma + j\omega$ приведем (10) к виду:

$$(\sigma^2 - \omega^2 + 2j\sigma\omega)\left\langle A\vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle + (\sigma + j\omega)\left\langle B\vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle + \left\langle C\vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle = 0 , \tag{11}$$

Пусть для координат вектора $\vec{Y}$ выполнено соотношение:

$$Y_2 = \alpha Y_1 , \tag{12}$$

где α — коэффициент формы связности. В этом случае вектор $\vec{Y}$ может быть представлен в виде:

$$\vec{Y} = Y_1 \vec{\alpha} , \tag{13}$$

где $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ — вектор, определяемый коэффициентом связности α. После подстановки (13) выражение (11) принимает вид:

$$(\sigma^2 - \omega^2 + 2j\sigma\omega)A_\alpha + (\sigma + j\omega)B_\alpha + C_\alpha = 0\,, \tag{14}$$

где $A_\alpha = \langle A\dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle$, $B_\alpha = \langle B\dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle$, $B_\alpha = \langle B\dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle$ — скалярные функции коэффициента формы связности α. Уравнение (14) может быть представлено в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \omega^2 A_\alpha = \sigma^2 A_\alpha + \sigma B_\alpha + C_\alpha; \\ 2\sigma\omega A_\alpha + \omega B_\alpha = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Найдём решение системы (15) относительно σ, ω, как функций α. Функция $\omega(\alpha)$ рассматривается как частотная функция, $\sigma(\alpha)$ — функция демпфирования. Особенности решения системы определяются знаком выражения $\sigma^2 A_\alpha + \sigma B_\alpha + C_\alpha$.

Учет диссипации. Уровень диссипации энергии может быть охарактеризован дискриминантом $B_\alpha{}^2 - 4A_\alpha C_\alpha$. При условии:

$$B_\alpha{}^2 < 4A_\alpha C_\alpha\,, \tag{16}$$

понимаемом как малость трения, решение (15) может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{C_\alpha}{A_\alpha} - \left(\dfrac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2; \\ \sigma = -\dfrac{B_\alpha}{2A_\alpha}. \end{cases} \tag{17}$$

Необходимо отметить, что при выполнении условий малости сил вязкого трения (16) выполнено равенство:

$$\omega^2 + \sigma^2 = \frac{C_\alpha}{A_\alpha}. \tag{18}$$

При условии «больших сил вязкого трения»:

$$B_\alpha{}^2 > 4A_\alpha C_\alpha\,, \tag{19}$$

решение (15) может быть представлено в виде:

$$\omega = 0\,, \ (20) \quad \sigma_1(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{2A_\alpha} - \sqrt{\left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2 - \frac{C_\alpha}{A_\alpha}}\,, \sigma_2(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{2A_\alpha} + \sqrt{\left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2 - \frac{C_\alpha}{A_\alpha}}\,. \tag{21}$$

Функция демпфирования имеет две компоненты $\sigma_1(\alpha)$, $\sigma_2(\alpha)$ такие, что:

$$\sigma_1(\alpha) + \sigma_2(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{A_\alpha}, \ \sigma_1(\alpha) \cdot \sigma_2(\alpha) = \frac{C_\alpha}{A_\alpha}. \tag{22}$$

Таким образом, в зависимости от уровня сил вязкого трения, возможны различные виды представления частотной функции и функции демпфирования. Если $B_\alpha{}^2 - 4A_\alpha C_\alpha < 0$, то определена частотная функция $\omega^2(\alpha)$ и одна компонента функции демпфирования $\sigma(\alpha)$. Если $B_\alpha{}^2 - 4A_\alpha C_\alpha > 0$, то предполагается, что частотная функция $\omega^2(\alpha)$ принимает нулевые значения, а функция демпфирования имеет две различные отрицательные компоненты $\sigma_1(\alpha)$, $\sigma_2(\alpha)$. Что касается условия $B_\alpha{}^2 - 4A_\alpha C_\alpha = 0$, то оно требует отдельного анализа. Вместе с тем, условие $B_\alpha{}^2 - 4A_\alpha C_\alpha = 0$ может быть интерпретировано как граница двух различных режимов движения механической системы.

Представленные аналитические выражения частотной функции, функции демпфирования и условий «малых» и «больших» сил вязкого трения могут быть детализированы при рассмотрении частных вариантов механических колебательных систем, полученных на основе системы с двумя степенями свободы.

2. Частотная функция и функция демпфирования для механической системы с двумя степенями свободы. Рассматриваются варианты параметров для механической системы, представленной на рис. 1. Предполагается, что множество граничных параметров, разделяющих режимы движение при малых и больших силах вязкого трения, определяется уравнением:

$$B_\alpha{}^2 = 4A_\alpha C_\alpha\,, \tag{23}$$

где:

$$A_\alpha = m_1 + m_2\alpha^2\,, \tag{24}$$

$$B_\alpha = (b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1\,, \tag{25}$$

$$C_\alpha = (k_0 + k_2)\alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1\,. \tag{26}$$

Условия малости сил вязкого трения имеют форму:

$$B_\alpha^{\ 2} < 4A_\alpha C_\alpha . \qquad (27)$$

В этом случае частотная функция $\omega^2(\alpha)$ и функция демпфирования $\sigma(\alpha)$:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = \dfrac{(k_0+k_2)\alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1 + m_2\alpha^2} - \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{(b_0+b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1+m_2\alpha^2}\right)^2 \\ \sigma(\alpha) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(b_0+b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1+m_2\alpha^2} \end{cases}. \qquad (28)$$

Условия больших сил вязкого трения имеют форму:

$$B_\alpha^{\ 2} > 4A_\alpha C_\alpha . \qquad (29)$$

При условиях (29) функции ω^2 и $\sigma(\alpha)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \omega^2 = 0; \\ \sigma_1(\alpha) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(b_0+b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1+m_2\alpha^2} - \\ -\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{(b_0+b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1+m_2\alpha^2}\right)^2 - \dfrac{(k_0+k_2)\alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1+m_2\alpha^2}}; \\ \sigma_2(\alpha) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(b_0+b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1+m_2\alpha^2} + \\ +\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{(b_0+b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1+m_2\alpha^2}\right)^2 - \dfrac{(k_0+k_2)\alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1+m_2\alpha^2}}. \end{cases} \qquad (30)$$

Представленные выражения отражают движения в форме экспоненциального убывания при отсутствии колебаний.

3. Особенности частотных функций и функций демпфировании для симметричных механических колебательных систем. Рассматривается механическая колебательная система с упруго-демпфирующими элементами, на значения параметров которых наложены условия симметрии в виде $b_1 = b_2 = b_0 = b$, $k_1 = k_2 = k_0 = k$. Принципиальная схема представлена на рис. 2.

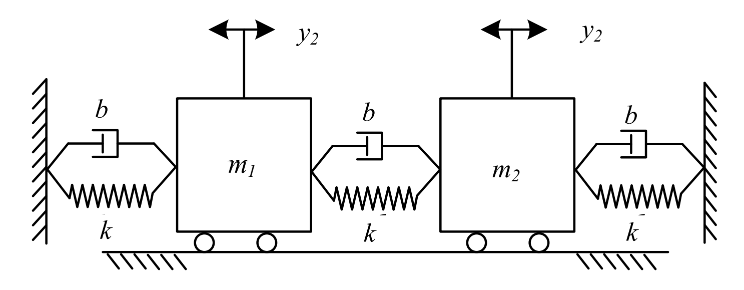


Рис. 2. «Симметричная» механическая система

Система дифференциальных уравнений (5) имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + 2b\dot{y}_1 - b\dot{y}_2 + 2ky_1 - ky_2 = 0; \\ m\ddot{y}_2 + 2b\dot{y}_2 - b\dot{y}_1 + 2ky_2 - ky_1 = 0. \end{cases} \qquad (31)$$

Функции A_α, B_α, C_α могут быть представлены выражениями:

$$A_\alpha = m_1 + m_2\alpha^2 , \qquad (32)$$

$$B_\alpha = 2b(\alpha^2 - \alpha + 1) , \qquad (33)$$

$$C_\alpha = 2k(\alpha^2 - \alpha + 1) . \qquad (34)$$

На основе представленных компонент могут быть построены частотная функция, функция демпфирования и сформулированы условия малости сил вязкого трения.

Учет сил вязкого трения. Условие малости сил трения могут быть представлены неравенством:

$$\left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2 < \frac{C_\alpha}{A_\alpha} . \qquad (35)$$

После подстановки функций (32)–(34) условие малости сил трения (35) может быть представлено в виде:

$$\gamma_0 < M(\alpha), \tag{36}$$

где $\gamma_0 = \dfrac{b^2}{4k}$ — обобщенный вязко-упругий параметр, $M(\alpha) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m_1 + m_2\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha + 1}$ — обобщенный массо-инерционный коэффициент, зависящий от коэффициента формы α. График функции M_α для каждого фиксированного γ_0 определяет множество значений α, при которых выполнено условие малости сил трения.

В качестве примера на рис. 3 приведен график параметризующей функции $M(\alpha)$. Функция $M(\alpha)$ обладает глобальным минимумом M_1 и максимумом M_2, при $\alpha \to \infty$ $M(\alpha) \to \dfrac{m_2}{2}$.

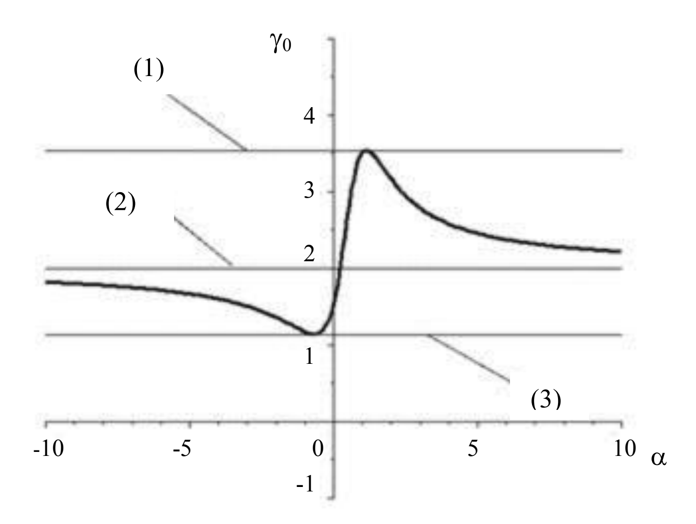


Рис. 3. Параметризующая функция $M(\alpha)$: 1 — уровень глобального максимума M_2, 3 — уровень глобального минимума M_1, 2 — уровень горизонтальной асимптоты $\dfrac{m_2}{2}$

Изменение параметра γ_0 в интервалах $(0, M_1)$, $(M_1, \dfrac{m_2}{2})$, $(\dfrac{m_2}{2}, M_2)$, (M_2, ∞) определяет характерные интервалы коэффициента формы α, в которых выполнены условия малости сил трения.

При малых силах трения частотная функция и функция демпфирования имеют вид:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = \dfrac{2k(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2} - \left(\dfrac{b(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2}\right)^2; \\ \sigma(\alpha) = -\dfrac{b(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2}. \end{cases} \tag{37}$$

При больших силах трения, при которых реализуется апериодическое движение системы, частотная функция равна нулю, а функция демпфирования имеет две компоненты:

$$\begin{cases} \omega^2 = 0; \\ \sigma_1(\alpha) = -\dfrac{b(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2} - \sqrt{\left(\dfrac{b(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2}\right)^2 - \dfrac{2k(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2}}; \\ \sigma_2(\alpha) = -\dfrac{b(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2} + \sqrt{\left(\dfrac{b(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2}\right)^2 - \dfrac{2k(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m_1 + m_2\alpha^2}}. \end{cases} \tag{38}$$

На основе аналитических представлений частотной функции и функции демпфирования могут быть определены характерные варианты и особенности экстремальных свойств соответствующих функций с учетом сил вязкого трения.

Обсуждение и заключение. Интерес представляют характерные варианты частотных функций и функций демпфирования в зависимости от условий малости сил вязкого трения. Рассматриваются варианты значений величины γ_0, определяющие характерные интервалы коэффициента формы α, в которых выполняются условия малости сил вязкого трения.

1. Пусть $\gamma_0 \in (0, M_1)$. Рассматривается пример $\gamma_0 \approx 0{,}1$. В этом случае выполнены условия малости сил трения для любого коэффициента формы $\alpha \in (-\infty..\infty)$. На рис. 4 и 5 представлены частотная функция $\omega^2(\alpha)$ и функция демпфирования $\sigma(\alpha)$ для механической упруго-диссипативной системы с параметрами $b = 1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $k = 3$.

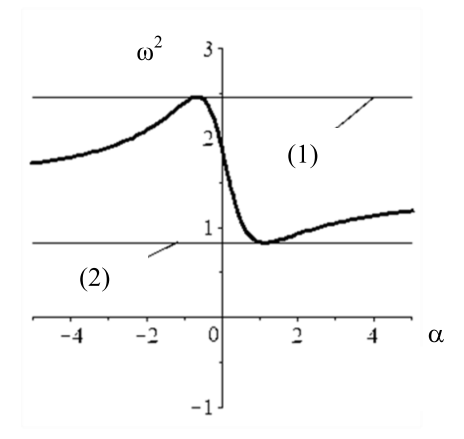


Рис. 4. Частотная функция $\omega^2(\alpha)$:
(1) и (2) — экстремальные уровни

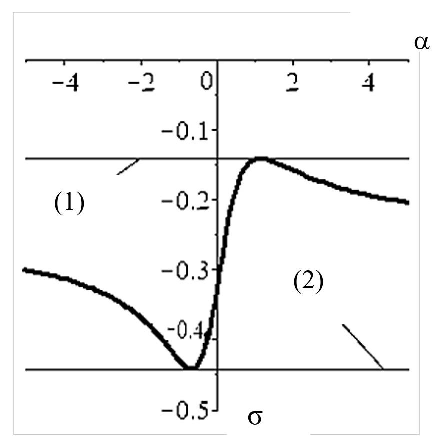


Рис. 5. Функция демпфирования $\sigma(\alpha)$:
(1) и (2) — экстремальные уровни

Корни уравнения, представляющего собой равенство нулю соответствующего определителя

$$\left|Ap^2 + Bp + C\right| = 0, \tag{39}$$

составляют $p_i = \omega_i + j\sigma_i$, $i = 1..4$, где $\omega_1 \approx 0{,}91$; $\omega_2 \approx 1{,}56$; $\omega_3 \approx -1{,}56$; $\omega_4 \approx -0{,}91$; $\sigma_1 \approx -0{,}14$; $\sigma_2 \approx -0{,}44$; $\sigma_3 \approx -0{,}44$; $\sigma_4 \approx -0{,}14$. На рис. 4 частотная функция достигает экстремальных значений, равных квадратам частот ${\omega_2}^2 \approx 2{,}46$ и ${\omega_1}^2 \approx 0{,}82$. На рис. 5 функция демпфирования достигает экстремальных значений, которые составляют $\sigma_3 \approx -0{,}44$ и $\sigma_4 \approx -0{,}14$. Свои экстремальные значения частотная функция и функция демпфирования достигают, когда коэффициенты формы составляют $\alpha_1{*} = -0{,}65$ и $\alpha_2{*} = 1{,}15$.

2. Пусть $\gamma_0 \in (M_1, \frac{m_2}{2})$. Рассматривается механическая система с параметрами $b = 4$, $\gamma_0 \approx 1{,}33$. На рис. 6 и 7 представлены соответствующие частотная функция и функция демпфирования. Множество коэффициентов форм, для которых выполняется условие малых сил трения, составляет: $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$, где α_i — корни уравнения $M(\alpha) = \gamma_0$. Для параметров $b = 4$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $k = 3$ корни характеристического уравнения (39) имеют вещественные части, представляющие собой коэффициенты диссипации, $\sigma_1 \approx -0{,}57$; $\sigma_2 \approx -1{,}08$; $\sigma_3 \approx -2{,}46$; $\sigma_4 \approx -0{,}57$ и мнимые части, представляющие собой частоты, $\omega_1 \approx 0{,}73$; $\omega_2 \approx 0$; $\omega_3 \approx 0$; $\omega_4 \approx -0{,}73$. На рис. 6 на интервале $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$ частотная функция имеет локальный минимум ${\omega_4}^2 \approx 0{,}53$.

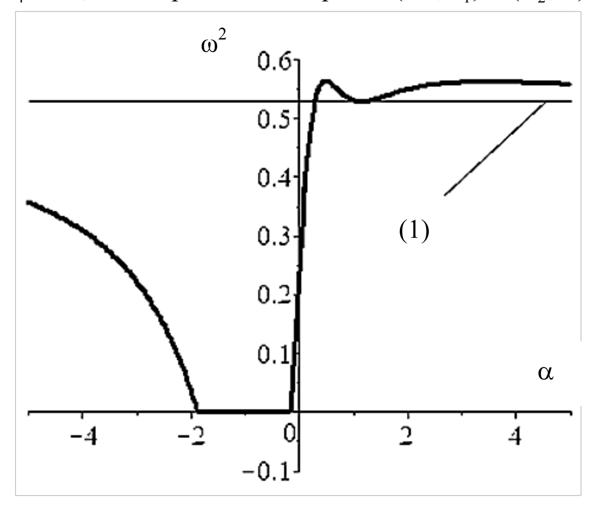


Рис. 6. Частотная функция :
(1) — экстремальный уровень в точке α_2^*

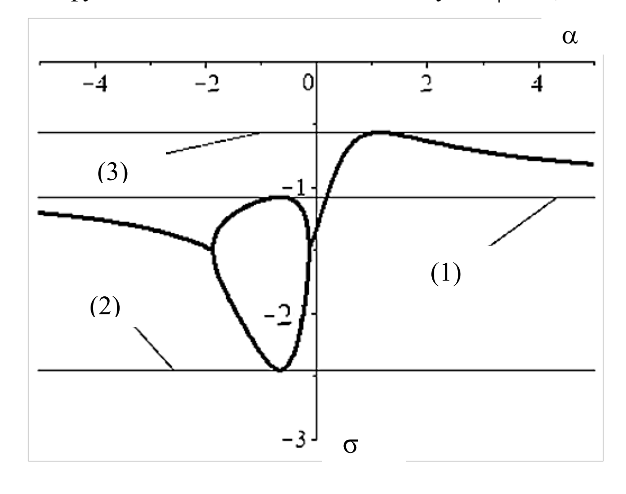


Рис. 7. Функция демпфирования : (3) –экстремальный уровень в точке α_2^*; (1), (2) — экстремальные уровни в точке α_1^* на интервале двузначности

На интервале (α_1, α_2) частотная функция равна нулю. В свою очередь, на рис. 7 функция демпфирования в интервале (α_1, α_2) двузначна и достигает одновременно двух экстремальных значений $\sigma_2 \approx -1{,}08$ и $\sigma_3 \approx -2{,}46$ в точке $\alpha_2{*}$. В области $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$ функция демпфирования однозначна и имеет один локальный экстремум $\sigma_1 \approx -0{,}57$ в точке $\alpha_2{*}$.

3. Пусть $\gamma_0 \in (\frac{m_2}{2}, M_2)$. Рассматривается механическая система с параметрами $b = 6$; $m_1 = 3$; $m_2 = 4$; $k = 3$. Корни характеристического уравнения (39) имеют вещественные $\sigma_1 \approx -0{,}85$; $\sigma_2 \approx -0{,}56$; $\sigma_3 \approx -4{,}74$; $\sigma_4 \approx -0{,}85$ и мнимые части $\omega_1 \approx 0{,}36$; $\omega_2 \approx 0$; $\omega_3 \approx 0$; $\omega_4 \approx -0{,}36$. Условия малости сил трения выполняются на интервале (α_1, α_2), где $\alpha_1 \approx 0{,}63$; $\alpha_2 \approx 2{,}37$. На рис. 8 соответствующая частотная функция положительна только на интервале (α_1, α_2). Локальный экстремум частотной функции равен $\omega_4{}^2 \approx 0{,}13$. Вне интервала (α_1, α_2) частотная функция равна нулю.

Функция демпфирования на рис. 9 в интервале $(-\infty, \alpha_1)$ двузначна и достигает одновременно двух экстремальных значений в точке $\alpha_1{*}$, которые составляют $\sigma_3 \approx -4{,}74$ и $\sigma_2 \approx -0{,}56$. В интервале (α_2, ∞) функция демпфирования также двузначна. В интервале (α_1, α_2) функция демпфирования однозначна и имеет один локальный экстремум $\sigma_1 \approx -0{,}85$ в точке $\alpha_2{*}$.

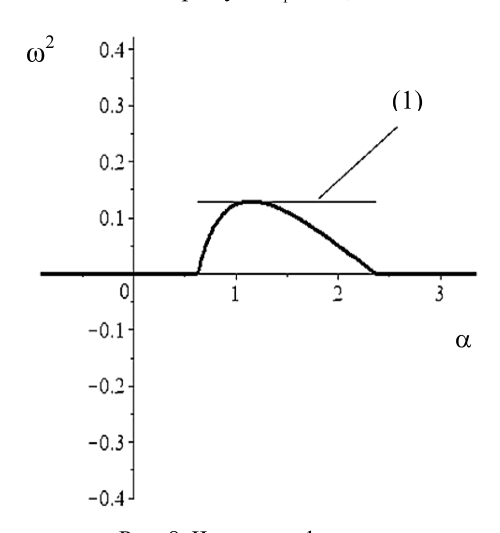


Рис. 8. Частотная функция:
(1) — экстремальный уровень в точке α_2^*

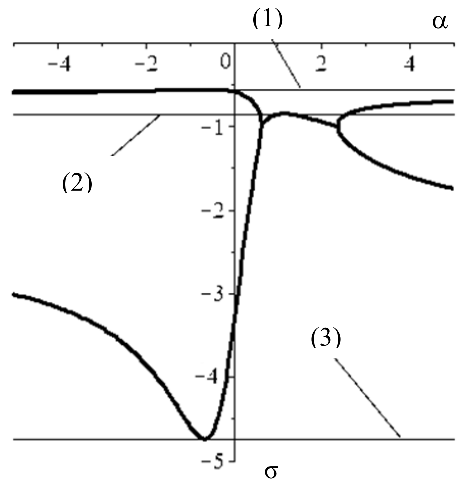


Рис. 9. Функция демпфирования: (1), (3) — экстремальные уровни в точке α_1^* на интервале двузначности,
(2) — экстремальный уровень в точке α_2^*

4. Пусть $\gamma_0 \in (M_2, \infty)$. Для параметров $b = 6{,}52$; $m_1 = 3$; $m_2 = 4$; $k = 3$ характеристическое уравнение (39) имеет только вещественные корни $\sigma_1 \approx -0{,}50$; $\sigma_2 \approx -0{,}88$; $\sigma_3 \approx -0{,}96$; $\sigma_4 \approx -5{,}26$. Соответствующая частотная функция и функция демпфирования представлены на рис. 10 и 11. Интервал выполнения условий малости сил трения вырождается в пустое множество.

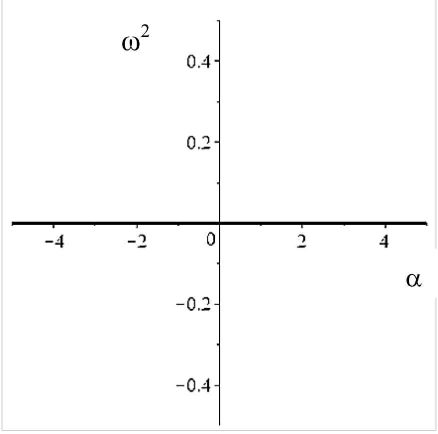


Рис. 10. Частотная функция:
вырожденный случай

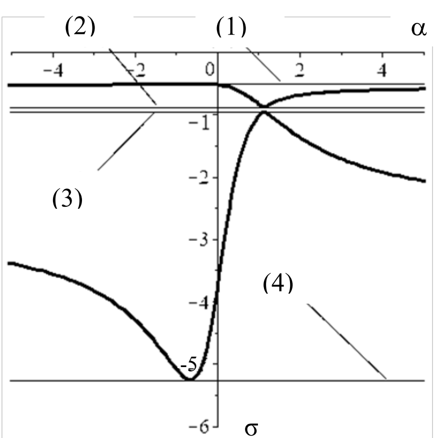


Рис. 11. Функция демпфирования, образованная двумя ветвями: и
(1), (2) — экстремальные уровни «верхней» ветви в точках α_1^* и α_2^*;
(3), (4) — экстремальные уровни «нижней» ветви в точках α_1^* и α_2^*

На рис. 10 частотная функция равна нулю на всей числовой оси. На рис. 11 соответствующая функция демпфирования двузначна на всей числовой оси и имеет 4 локальных экстремума $\sigma_1 \approx -0{,}50$; $\sigma_2 \approx -0{,}88$; $\sigma_3 \approx -0{,}96$; $\sigma_4 \approx -5{,}26$ в точках α_1^* и α_2^*

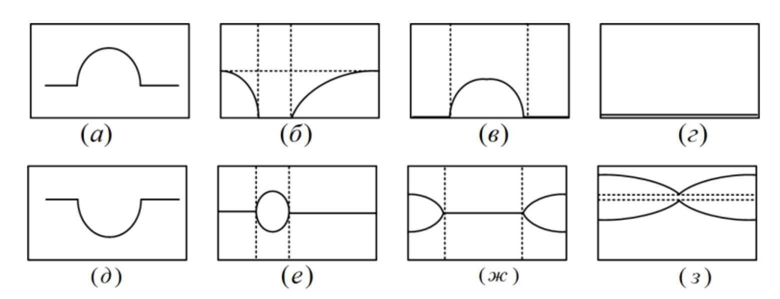


Рис. 12. Пиктограммы топологических особенностей графиков частотной функции и функции демпфирования: (*а*)-(*г*) — пиктограммы, сопоставленные графикам частотных функций, представленных на рис. 4, 6, 8, 10 соответственно; (*д*)-(*з*)— пиктограммы, сопоставленные функциям демпфирования на рис. 5, 7, 9, 11 соответственно

Представленные на рис. 12 пиктограммы, сопоставленные графикам функций на рис. 4–11, отражают ряд топологических особенностей графиков частотной функции и функции демпфирования. К таким особенностям можно отнести форму графика в виде одной кривой, наличие на графике точек раздваивания одной кривой на две, наличие двух непересекающихся кривых или «кольца».

Таким образом, достигаемые экстремальные значения частотной функции и функции демпфирования связаны с динамическими характеристиками механической колебательной системы с учетом сил трения. В частности, экстремальные значения построенных частотной функции и функции демпфирования связаны с собственными частотами и диссипативными коэффициентами затухающих колебаний. При этом вопрос существования экстремальных значений частотной функции и функции демпфирования, не совпадающих с квадратами частот собственных колебаний, требует дополнительного рассмотрения. Вместе с тем, можно предположить, что формы частотных функций и функций демпфирования, обуславливающие формы свободных движений механических колебательных систем с трением, представляют интерес для оценки более широкого круга динамических свойств.

В плане практической реализации возможного управления колебательными режимами механических систем на основе коэффициента связности не существует принципиальных препятствий. К примеру, возможные системы управления динамическим состоянием могут включать датчики амплитуд колебания в контрольных точках вибрационной технологической машины или транспортного средства. Вместе с тем, вопросы построения подобных систем требуют детального рассмотрения широкого круга особенностей, связанных с техническим объектом.

В заключение в качестве выводов представленных исследований можно отметить следующие моменты.

1. Для механической колебательной системы с учетом сил вязкого трения разработан метод построения частотной функции и функции демпфирования, зависящих от коэффициента форм связности координат свободных движений. Показано, что совокупность экстремальных значений частотной функции и функции демпфирования отображает собственные характеристики упруго-диссипативной механической колебательной системы.

2. Показано, что частотная функция и функции демпфирования для механической колебательной с двумя степенями системы с учетом вязкого трения может быть представлена в двух вариантах, определяемых условиями на величину сил вязкого трения для фиксированного коэффициента форм связности; для условий малых сил вязкого трения значения частотной функции принимают положительные значения, а функция демпфирования имеет одну отрицательную компоненту; если выполнены условия больших сил вязкого трения, то частотная функция принимает нулевые значения, а функция демпфирования имеет две отрицательные компоненты.

4. Предложен метод построения возможных вариантов частотных функций и функций демпфирования для различных значений параметров системы на основе параметризующей функции, позволяющей определить области значений коэффициента форм связности, в которых выполняется условие малости сил вязкого трения. Предложен критерий классификации частотных функций и функций демпфирования в зависимости от топологических особенностей их графиков.

5. Матричный метод построения частотно-демпирующей функции для системы двумя степенями свободы может быть распространен на механические колебательные системы, рассматриваемые в различных системах координат.

6. В качестве физической интерпретации коэффициента связности, используемого в частотной функции и функции демпфирования, может рассматриваться рычажная связь в форме передаточного отношения, выраженного через отношения амплитуд колебаний координат парциальных блоков. Рассматриваемое отношение, наравне со статическим состоянием, может быть определено для режимов установившихся и затухающих колебаний. Таким образом, развивается концепция, в рамках которой отправной точкой анализа механической системы является рычажная связь.

Библиографический список

1. Clarence W. de Silva. Vibration: Fundamentals and Practice / Clarence W. de Silva // Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. — 957 p.

2. Iwnicki, S. Handbook of railway vehicle dynamics / S. Iwnicki // Boca Raton: CRC Press, 2006. — 552 p. DOI: 10.1201/9781420004892

3. Banakh, L. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure / L. Banakh, M. Kempner // Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. — 262 p. DOI: 10.1007/978-3-642-03126-7

4. Karnovsky, I.A. Theory of Vibration Protection / I.A. Karnovsky, E. Lebed // Switzerland: Springer International Publishing, 2016. — 708 p.

5. Eliseev, S.V. Theory of Oscillations: Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects / S.V. Eliseev, A.V. Eliseev // Springer International Publishing, Cham, 2020. — 521 p.

6. Eliseev, S. V. Dynamics of mechanical systems with additional ties / S.V. Eliseev, A.V. Lukyanov, Yu. N. Reznik [et al.] // Irkutsk: Irkutsk State University, 2006. — 316 p.

7. Rocard, Y. General Dynamics of Vibrations / Y. Rocard // Paris: Masson, 1949. — 458 p.

8. Елисеев, А. В. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов: монография / А. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, А. О. Московских. — Москва : Инновационное машиностроение, 2019. — 381 с.

9. Елисеев, С. В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С. В. Елисеев, А. И. Артюнин. — Наука : Новосибирск, 2016. — 459 с.

10. Стретт, Дж. В. Теория звука / Дж. В. Стретт. — Москва : ГИТТЛ, 1955. — Т. 1. — 503 с.

11. Елисеев, С. В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография / С. В. Елисеев; отв. ред. А. И. Артюнин. — Иркутск : ИрГУПС, 2018. — 692 с.

12. Хоменко, А. П. Развитие энергетического метода определения частот свободных колебаний механических систем / А. П. Хоменко, С. В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2016. — № 1 (49). — С. 8–19.

13. Елисеев, С. В. О возможностях использования дополнительных связей инерционного типа в задачах динамики технических систем / С. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, Р. С. Большаков, Д. Х. Нгуен // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2016. — № 5 (112). — С. 19–36.

14. Определение частот собственных колебаний механических колебательных систем : особенности использования частотной энергетической функции. Часть I. / С. В. Елисеев, Р. С. Большаков, Д. Х. Нгуен, К. Ч. Выонг // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2016. — № 6 (113). — С. 26–33.

15. Определение частот собственных колебаний механических колебательных систем: особенности использования частотной энергетической функции. Часть II / С. В. Елисеев, Р. С. Большаков, Д. Х. Нгуен, К. Ч. Выонг // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2016. — № 7 (114). — С. 10–23.

Сдана в редакцию 06.11.2020
Запланирована в номер 19.11.2020

Об авторах:

Елисеев Андрей Владимирович, доцент кафедры «Математика» ФГБОУ ВО Иркутский государственный университет путей сообщения (664074, РФ, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15), кандидат технических наук, доцент, ResearcherID: N-9357-2016, ScopusID: 57191957568, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0222-2507, eavsh@ya.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.